'समानो मन्त्रः समितिः समानी'

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Programme 3rd Semester Examination, 2021

DSC1/2/3-P3-MATHEMATICS

REAL ANALYSIS

Time Allotted: 2 Hours | Full Marks: 60

The figures in the margin indicate full marks.
All symbols are of usual significance.

GROUP-A / বিভাগ-ক

1. Answer any ***four*** questions: 3×4 = 12

   যে-কোন ***চারটি*** প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

   (a) Prove that every open interval is an open set but the converse is not always true. 2+1

   প্রমাণ কর প্রত্যেক open interval open সেট হবে, কিন্তু ইহার বিপরীত সবসময় সত্য নয়।

   (b) Show that $\left\{\frac{3n+1}{n+2}\right\}$ is a bounded sequence. 3

   দেখাও যে $\left\{\frac{3n+1}{n+2}\right\}$ একটি bounded sequence.

   (c) Show that the series $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}+\cdots$ is convergent. 3

   দেখাও যে $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}+\cdots$ শ্রেণীটি অভিসারী (convergent).

   (d) Examine whether every bounded sequence is Cauchy or not. 3

   প্রত্যেক bounded sequence Cauchy হবে কিনা বুঝিয়ে বল।

   (e) If $f : A \to B$ is a function such that range of f is uncountable set then show that A is uncountable set. 3

   যদি $f : A \to B$ একটি অপেক্ষক হয় যেখানে f এর range সেটটি অগণ্য (uncountable) সেট তাহলে প্রমাণ কর A সেটটিও অগণ্য হবে।

   (f) Prove that any open interval (a, b) in $\mathbb{R}$ is not a compact. 3

   প্রমাণ কর $\mathbb{R}$-এর প্রত্যেক open interval (a, b) compact নয়।

GROUP-B / বিভাগ-খ

Answer any *four* questions $6\times4 = 24$

যে-কোন *চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও

2. (a) Prove that every open interval (a, b) contains a rational number and also an irrational number. 4

প্রমাণ কর প্রত্যেক open interval (a, b) এর মধ্যে একটি মূলদ সংখ্যা (rational number) ও একটি অমূলদ সংখ্যা (irrational number) থাকে।

(b) Prove that $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ cannot be a rational number. 2

প্রমাণ কর $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ সংখ্যাটি একটি মূলদ সংখ্যা নয়।

3. (a) Establish $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{n^2-5n-3}=1$ 3

প্রমাণ করঃ $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{n^2-5n-3}=1$

(b) Prove that the set $S=\{x\in\mathbb{R}\,|\,2x^2-5x+2<0\}$ is an open set. 3

প্রমাণ কর $S=\{x\in\mathbb{R}\,|\,2x^2-5x+2<0\}$ সেটটি open সেট।

4. (a) Prove that $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ is countable set if $A_1, A_2\cdots$ are countable sets. 4

যদি $A_1, A_2\cdots$ প্রত্যেক countable সেট হয় প্রমাণ কর $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ সেটটি countable সেট হবে।

(b) For any two sets S and T, show that $\overline{S\cap T}\subset\overline{S}\cap\overline{T}$ 2

S এবং T যে-কোনো দুটি সেট হলে দেখাও যে $\overline{S\cap T}\subset\overline{S}\cap\overline{T}$

5. Prove that arbitrary union of open sets is open. Examine whether infinite intersection of open sets is open or not. 6

প্রমাণ কর মুক্ত সেটসমূহের (open sets) যদৃচ্ছ সংযোগ (arbitrary union) মুক্ত সেট হয়। এছাড়াও অসংখ্য মুক্ত সেটসমূহের ছেদ (intersection) মুক্ত সেট হবে কিনা পরীক্ষা কর।

6. (a) Use integral test to examine the convergence or divergence of the series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$. 3

Integral test এর সাহায্যে $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$ শ্রেণীটি অভিসারী (convergence) না অপসারী (divergence) হবে পরীক্ষা কর।

(b) Prove that $\{x_n\}$ is not convergent where $x_n=(-1)^n$. 3

$x_n=(-1)^n$ হলে দেখাও যে $\{x_n\}$ অভিসারী নয়।

7. Test the convergency of the following series. 3+3

নিম্নলিখিত শ্রেণীর অভিসারীতা পরীক্ষা করঃ

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3^{n+1}}$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty}(1+1/n)^{-n^2}$

GROUP-C / বিভাগ-গ

Answer any *two* questions $12\times2 = 24$

যে-কোন *দুটি* প্রশ্নের উত্তর দাও

8. (a) Give an example of an open cover of the set $(0, 1]$ which does not have a finite subcover. 3

$(0, 1]$ সেটের এমন একটি open cover-এর উদাহরণ দাও যার নির্দিষ্ট সংখ্যক subcover নেই।

(b) Let A and B be subsets of $\mathbb{R}$ of which A is closed and B is compacts. Prove that $A\cap B$ is compact. 3

ধর A এবং B, $\mathbb{R}$ সেটের দুটি উপসেট যেখানে A হল closed এবং B হল compact. দেখাও যে $A\cap B$ একটি compact সেট।

(c) Prove that $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ is a divergent series. 6

প্রমাণ কর $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ একটি অপসারী শ্রেণী।

9. (a) Let $S=\left\{\frac{1}{2^m}+\frac{1}{2^n}: m\in\mathbb{N}, n\in\mathbb{N}\right\}$. Show that 0 is a limit point of S. 3

যদি $S=\left\{\frac{1}{2^m}+\frac{1}{2^n}: m\in\mathbb{N}, n\in\mathbb{N}\right\}$ দেখাও যে S সেটটির সীমাবিন্দু (limit point) হবে 0 ।

(b) If S be a non-empty bounded subset of $\mathbb{R}$, prove that $\sup S\in\overline{S}$ and $\inf S\in\overline{S}$ where $\overline{S}$ is the closure of S. 6

যদি S, $\mathbb{R}$ সেটের একটি অশূন্য bounded উপসেট হয়, প্রমাণ কর $\sup S\in\overline{S}$ এবং $\inf S\in\overline{S}$ যেখানে $\overline{S}=S$ সেটের closure সেট।

(c) Show that for any fixed value of x the series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ is convergent 3

x-এর মান অপরিবর্তিত হলে দেখাও যে $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ শ্রেণীটি অভিসারী (convergent)।

10.(a) Show that the series $1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\cdots$ is convergent and rearrangement of the series 6

$1+\frac{1}{2}-1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{3}+\cdots$ converges to $\log 2$.

দেখাও যে $1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\cdots$ শ্রেণীটি অভিসারী এবং

$1+\frac{1}{2}-1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{3}+\cdots$ পুনর্বিন্যাসের পর শ্রেণীটি $\log 2$ মানে অভিসারী।

(b) Let S be a subset of $\mathbb{R}$. Suppose S contains all its limit point then show that S^c is an open set where S^c is complement of S. 6

ধর S, $\mathbb{R}$ এর একটি উপসেট এবং S সেটের সকল সীমাবিন্দু (limit point) S সেটে আছে। তাহলে দেখাও যে S^c একটি open সেট, যেখানে $S^c = S$ সেটের complement সেট।

11.(a) Let S be a bounded subset of $\mathbb{R}$ and T be any non-empty subset of S. Prove that $\inf S \le \inf T \le \sup T \le \sup S$. 6

ধর S, $\mathbb{R}$ সেটের একটি bounded উপসেট এবং T, S সেটের অশূন্য (non-empty) উপসেট।

প্রমাণ করঃ $\inf S \le \inf T \le \sup T \le \sup S$

(b) Show that $x + \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{3^3 x^3}{3!} + \frac{4^4 x^4}{4!} + \cdots \quad x > 0$ converges if $x < \frac{1}{e}$ diverges if $x \ge \frac{1}{e}$. 6

দেখাও যে, $x + \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{3^3 x^3}{3!} + \frac{4^4 x^4}{4!} + \cdots \quad x > 0$ শ্রেণীটি অভিসারী হবে যদি $x < \frac{1}{e}$ এবং অপসারী হবে যদি $x \ge \frac{1}{e}$।

——×——